Examen d'Analyse 1 (Semestre 1-Session principale) (07/01/2019)

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier votre réponse.

- 1) $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 \leq 0$ 2) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 > 0$ 3) $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| = -x$.
- 4) $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 < 0$ 5) Toute fonction croissante est positive
- 6) Toute suite réelle bornée est convergente. 7) Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- 8) Si une sous suite $(u_{\phi(n)})$ d'une suite (u_n) est convergente alors la suite (u_n) est convergente

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$, et f une fonction continue et dérivable sur $[a, +\infty[$.

1. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

2. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l > 0$. Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Exercice 3 Développement limités en un point différent de 0 et leurs applications

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(\sin x)$

1. Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en $\frac{\pi}{2}$
2. Déterminer la tangente de f au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ et étudier la position de f par rapport à sa tangente au voisinage de $\frac{\pi}{2}$

Exercice 4

Pour tout entier $n \geq 1$, posons $u_n = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}$.

- a) Montrer par récurrence que l'on a $u_n \geq \frac{n\sqrt{n}}{2}$ pour tout entier $n \geq 1$. En déduire la limite de $\frac{n}{u_n}$.
- b) Posons $v_n = u_{2n} - u_n$. Démontrer l'inégalité $n\sqrt{n+1} \leq v_n \leq n\sqrt{2n}$. En déduire la limite de v_n/n et la limite de v_n/n^2 .

Exercice 5

Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ une fonction continue et strictement décroissante.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la fonction $g_n(x) = f(x) - x^n$, démontrer qu'il existe un unique nombre réel $u_n \in [0; 1]$ tel que $f(u_n) = (u_n)^n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le signe de $g_{n+1}(u_n)$. En déduire successivement que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante puis qu'elle converge vers un nombre réel $l \in [0; 1]$.
3. On souhaite démontrer que $l = 1$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $l \in [0; 1[$.
 - Donner la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire que $f(l) = 0$.
 - Comparer $f(l)$ à $f(1)$ et aboutir à une absurdité. Conclure.

Examen d'Analyse 1 (Semestre 1-Session de rattrapage) (04/02/2019)

Exercice 1

Soit f une fonction réelle telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty$

1. Montrer que pour tout réel α il existe $x_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \geq x_\alpha \quad f(x) \geq |\alpha x| + |x|$
2. En déduire que pour tout réel α , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \alpha x = +\infty$

Exercice 2

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ telles que $g(x) > 0$ et il existe $l \in \mathbb{R}^*$, tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$
2. Montrer que si $l > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Exercice 3

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I centré en 0.

1. Démontrer que si f est paire (resp. impaire), alors f' est impaire (resp. paire).
2. Soit $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f c'est à dire $F'(x) = f(x)$.
 - (a) On suppose f impaire. Démontrer que F est paire. Introduire $\phi(x) = F(-x) - F(x)$.
 - (b) On suppose f paire. La fonction F est-elle impaire ?

Exercice 4

Démontrer

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [1, 3] \quad |x-2| < \alpha \implies |x^2-4| < \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad |x-2| < \alpha \implies |x^2-4| < \varepsilon$

Exercice 5 Développement limités en un point différent de 0 et leurs applications

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

1. Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en $\frac{\pi}{4}$
2. Déterminer la tangente de f au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$ et étudier la position de f par rapport à sa tangente au voisinage de $\frac{\pi}{4}$

Exercice 6

Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ une fonction continue et strictement décroissante.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la fonction $g_n(x) = f(x) - x^n$, démontrer qu'il existe un unique nombre réel $u_n \in [0; 1]$ tel que $f(u_n) = (u_n)^n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le signe de $g_{n+1}(u_n)$. En déduire successivement que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante puis qu'elle converge vers un nombre réel $l \in [0; 1]$.
3. On souhaite démontrer que $l = 1$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $l \in [0; 1[$.
 - Donner la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire que $f(l) = 0$.
 - Comparer $f(l)$ à $f(1)$ et aboutir à une absurdité. Conclure.

Questions de cours:

1)- J'effectue le raisonnement suivant avec deux fonctions réelles f et g :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \times g(x) = 0 \\ \xRightarrow{(1)} & \forall x \in \mathbb{R}, \quad (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0) \\ \xRightarrow{(2)} & (\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = 0) \end{aligned}$$

Ces implications (1) et (2) sont-elles valides? (copier et remplir ce tableau)

Implication	Vraie	Fausse	Justification
(1)			
(2)			

- 2)- C'est quoi une relation binaire $\mathcal{R}$ anti-symétrique sur un ensemble E ?
 3)- Donner la définition d'un idéal à droite I dans un anneau $(A, +, \cdot)$.
 4)- C'est quoi la différence entre la structure d'un anneau unitaire et celle d'un corps? Donner un exemple d'un anneau unitaire qui n'est pas un corps.

Exercice 1. Soit A une partie d'un ensemble E . On appelle fonction caractéristique de A l'application f_A de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$ telle que :

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Soient A et B deux parties de E . Montrer que

$$1. f_{\complement A} = 1 - f_A; \quad 2. f_{A \cap B} = f_A f_B; \quad 3. f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_A f_B.$$

Exercice 2. On considère la relation de congruence, modulo $n \in \mathbb{N}^*$, définie sur $\mathbb{Z}$ par:

$$z \mathcal{R} z' \iff n \text{ divise } z - z'.$$

- (1) Montrer que c'est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
 (2) En vous servant de la division euclidienne, montrer qu'il y a exactement n classes d'équivalences distinctes.

Rappel (Division euclidienne)

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! q \in \mathbb{Z} \text{ et } \exists! r \in \{0, 1, \dots, n-1\} \text{ tels que } m = nq + r.$$

Exercice 3. Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur $E = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ et } x \leq y\}$ de la façon suivante :

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \iff (x \geq x' \text{ et } y \leq y').$$

- (1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E .
 (2) Dessiner le diagramme de Hasse de la relation d'ordre $\mathcal{R}$.

Exercice 4. On dit qu'un anneau $(A, +, \cdot)$ est un anneau de Boole si, pour tout $x \in A$, $x^2 = x$. On fixe A un tel anneau.

- (1) Démontrer que, pour tout $x \in A$, $x = -x$. (Ind. calculer $(x+x)^2$ de deux manières.)
 (2) En déduire que l'anneau de Boole A est commutatif. (Ind. calculer $(x+y)^2$ de deux manières.)

UNIVERSITÉ IBN ZOHR

Faculté Polydisciplinaire Taroudant

A.U.: 2018-2019/Session de rattrapage/Semestre 1

Examen en Algèbre

Durée: 1h30mn

Nombre de pages : 1

Questions de cours:

1)- Soit P une assertion vraie et Q une assertion fausse. Quelles sont les assertions vraies?

$$P \vee Q, \quad P \wedge Q, \quad \overline{P} \vee Q \quad \text{ou} \quad \overline{P \wedge Q}.$$

2)- Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2\}$. Parmi ces écritures laquelle est mathématiquement correcte ?

$$\{a, 1\} \in A \times B, \quad \{(a, 1)\} \in A \times B, \quad (a, 1) \in A \times B \quad \text{ou} \quad \{a, 1\} \subset A \times B.$$

3)- Rappeler les règles de De Morgan.

4)- Soit E un ensemble non vide. On considère l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ (l'ensemble des parties de E) avec ses deux lois internes : l'intersection $\cap$ et la réunion $\cup$. Soient a, b et c trois éléments de E . Expliquer pourquoi le sous-ensemble $\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ de $\mathcal{P}(E)$ n'est pas stable pour les deux lois $\cap$ et $\cup$?

5)- C'est quoi un anneau intègre $(A, +, \cdot)$? Donner un exemple.

Exercice 1. Notons E l'ensemble des étudiants, S l'ensemble des jours de la semaine et pour un étudiant x , $h_j(x)$ son heure de réveil le jour j .

1) Ecrire avec les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ les propositions:

a) certains étudiants se réveillent tous les jours de la semaine avant 8h.

b) tous les étudiants se réveillent un certain jours de la semaine après 9h.

2) Donner la négation logique de ces propositions a) et b).

Exercice 2. On considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$x \mathcal{R} y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1.$$

1) Montrer que cette relation n'est pas anti-symétrique.

2) Montrer que c'est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

3) Donner la classe d'équivalence $\bar{0}$ associée à $x = 0$ pour cette relation $\mathcal{R}$.

Exercice 3.

1) Montrer que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*\}$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

2) Soit $A = \{\frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z}, n \in 2\mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire que A est l'ensemble des rationnels à dénominateur pair.

a) Démontrer que $(A, +, \times)$ (muni de ses lois usuelles "somme" et "produit") est un anneau.

b) Quels sont les éléments inversibles dans A ?

Exercice 4. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et M une partie de A . On appelle annulateur de M l'ensemble des éléments $x \in A$ tels que $x \times y = 0_A$ pour tout $y \in M$. On note cet ensemble par I_M . Démontrer que, l'annulateur de M , I_M est un idéal de $(A, +, \times)$.