Chapitre

1. Examens d'Analyse avec corrections

FILIÈRES SV,SABE,AGRO,VPT,IZPA,GEO-MINE

PR. A. AZZOUZI

Sommaire

Faculté polydisciplinaire de Taroudant
Filières : Agro/BV/IZPA
Pr. A. AZZOUZI

1.1. Examen d'Analyse (13/01/2012) – (Durée 1h30)

Exercice 1 Questions de cours

Soient x, y, z des nombres réels.

1. Donner la définition de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction f au point x_0.
2. Prouver l'égalité suivante :
$$|x+y| = |x| + |y| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^-,\, y \in \mathbb{R}^- .$$
3. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, simplifier les écritures suivantes :
a) : $|-x|$, b) : $\max\{-x,-y\}$ (si $x<y$) , c) : $\max\{x, x+y\}$.
4. Prouver par deux méthodes différentes que : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Exercice 2 cet exercice ne rentre pas dans le programme de 2018/2019

Montrer les affirmations suivantes :

1. Déterminer le Développement limité d'ordre 2 en 0 de $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+1}}$
2. Etudier la position du graphe de la fonction f et de sa tangente au point 0.
3. La fonction f est-elle concave ou convexe au voisinage de 0 ?

Exercice 3

1. Soit a un nombre réel et soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$. Montrer que la dérivée n-ième de f est définie par $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{(x-a)^{n+1}}$
2. Calculer les intégrales suivantes :
$$a)\ \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}+2x}\,dx, \qquad b)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2+\sin^2 x}\,dx.$$

Exercice 4

1. Résoudre, sur l'intervalle $]-1,1[$, le problème différentiel suivant :
$$(x^2-1)y' + 2xy = xe^x, \qquad y(0) = 1.$$
2. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   - i) $y'' - 2y' = -4x - 2$.
   - ii) $y'' - 2y' = 2e^x$.
   - iii) $y'' - 2y' = -4x - 2 + 2e^x$.

1.1.a. Examen d'Analyse (13/01/2012) : Correction

Exercice 1 Questions de cours

Soient x, y, z des nombres réels.

1. On donne la définition de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction f au point x_0.
   - Une fonction f est continue en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
   - Une fonction f est dérivable en x_0 si le taux de variation $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$ Ainsi
   $$f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
2. On prouve l'égalité suivante :
   $$|x+y| = |x| + |y| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^-, y \in \mathbb{R}^- .$$
   Puisque $x \in \mathbb{R}^-$, et $y \in \mathbb{R}^-$ alors $x+y \in \mathbb{R}^-$, et donc
   $$\left.\begin{array}{r} |x+y| = -x-y \\ |x| = -x \\ |y| = -y \end{array}\right\} \Longrightarrow |x+y| = |x| + |y|$$
3. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, On va simplifier les écritures suivantes :
   a) : $|-x|$, b) : $\max\{-x,-y\}$ (si $x < y$) , c) : $\max\{x, x+y\}$.
   a) $|-x| = |x|$
   b) $x < y \Longrightarrow -y < -x$ alors
   $$\max\{-x,-y\} = -x$$
   c) si $y > 0$ alors $x < x+y$ alors
   $$\max\{x, x+y\} = x+y$$
   si $y < 0$ alors $x+y < x$ alors
   $$\max\{x, x+y\} = x$$
4. On va prouver par deux méthodes différentes que : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
   a) Première méthode
   En utilisant la règle de l'Hospital on a
   $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$
   b) Deuxième méthode
   En utilisant la définition de la dérivée on a
   $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$

Exercice 2

1. On va déterminer le Développement limité d'ordre 2 en 0 de $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x+1}}$
   Soit g une fonction de classe $\mathbb{C}^2$. Son développement limité d'ordre 2 en 0 est le suivant
   $g(x) = g(0) + g'(0)(x-0) + \frac{g''(a)}{2!}(x-0)^2 + o(x-0)^2$, donc
   $\sqrt{x+1} = 1 + x - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$, alors
   $x + \sqrt{x+1} = 1 + 2x - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$, alors
   $\sqrt{x + \sqrt{x+1}} = \sqrt{1 + 2x - \frac{x^2}{8} + o(x^2)}$,

On pose $u = 2x - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$. Quand x tend vers 0 alors u tend aussi vers 0

On $\sqrt{u+1} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$,

$u = 2x - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \implies u^2 = 4x^2 + o(x^2)$ donc on va remplacer la variable u par x

$\sqrt{x+\sqrt{x+1}} = 1 + x - \frac{x^2}{4} - \frac{4x^2}{8} + o(x^2)$, donc

$\sqrt{x+\sqrt{x+1}} = 1 + 2x - \frac{x^2}{4} + o(x^2)$,

$$f(x) = 1 + 2x - \frac{x^2}{4} + o(x^2), \tag{1.1}$$

2. On va étudier la position du graphe de la fonction f et de sa tangente au point 0.
   D'après l'équation 1.1 on déduit que la tangente de f au point 0 est donnée par $T_f = 1 + 2x$.

   Pour comparer f et sa tangente on va calculer leur différence.
   $f(x) - T_f = \underbrace{-\frac{x^2}{4} + o(x^2)}_{<0}$
   donc $f(x) < T_f$ et par suite on constate que la courbe de la fonction f est dessous de sa tangente au voisinage de 0.
3. On étudie si La fonction f est concave ou convexe au voisinage de 0
   D'après l'équation 1.1 on déduit que $f''(0) = -\frac{1}{4}$.
   Puisque $f''(0) < 0$ alors f est concave au voisinage de 0

Exercice 3

---

1. Soit a un nombre réel et soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x-a}$. On va montrer que la dérivée n-ième de f est définie par $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x-a)^{n+1}}$
   On va prouver cette relation par récurence
   a) La Relation est vraie pour $n = 1$ car
   $$f^{(1)}(x) = \left(\frac{1}{x-a}\right)' = \frac{-1}{(x-a)^2} = (-1)^1 \frac{n!}{(x-a)^{1+1}}$$
   b) On suppose que la relation est vraie pour $n = N$ i.e. $f^{(N)}(x) = (-1)^N \frac{N!}{(x-a)^{N+1}}$
   c) On va montrer que la relation est vrai pour $n = N+1$.
   $$\begin{aligned} f^{(N+1)}(x) &= \left(f^{(N)}(x)\right)' \\ &= \left((-1)^N \frac{N!}{(x-a)^{N+1}}\right)' && \text{(D'après l'hypothèse de récurence)} \\ &= -(-1)^N \frac{N!\left((x-a)^{N+1}\right)'}{(x-a)^{2N+2}} && \left(\left(\tfrac{1}{u}\right)' = -\tfrac{u'}{u^2}\right) \\ &= (-1)^{N+1} \frac{N!(N+1)(x-a)^N}{(x-a)^{2N+2}} && \left((u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}\right) \\ &= (-1)^{N+1} \frac{N!(N+1)}{(x-a)^{N+2}} \\ &= (-1)^{N+1} \frac{(N+1)!}{(x-a)^{(N+1)+1}} && ((N+1)! = N!(N+1)) \end{aligned}$$

D'après a), b) et c) on déduit que la relation $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{(x-a)^{n+1}}$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. On va calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}+2x}\,dx, \qquad b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2+\sin^2 x}\,dx.$$

a) On calcule l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}+2x}\,dx$, en utilisant le changement de variable suivant $u = \sqrt{x}$.

$u = \sqrt{x} \implies x = u^2 \implies dx = 2u\,du.$

Quand $x = 1$ alors $u = 1$ et quand $x = 2$ alors $u = \sqrt{2}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}+2x}\,dx &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u+2u^2}\,2u\,du \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2}{1+2u}\,du \\
&= \big[\ln(1+2u)\big]_1^{\sqrt{2}} \\
&= \ln(1+2\sqrt{2}) - \ln(3)
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2+\sin^2 x}\,dx. &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos x}{2+\sin^2 x}\,dx. \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2+\sin^2 x)'}{2+\sin^2 x}\,dx. \\
&= \big[\ln(2+\sin^2 x)\big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \ln(2+\sin^2 \tfrac{\pi}{2}) - \ln(2)
\end{aligned}$$

Exercice 4

1. On va résoudre sur l'intervalle $]-1,1[$, le problème différentiel suivant :

$$(x^2-1)y' + 2xy = xe^x, \quad y(0) = 1. \qquad (E)$$

On va noter y_0 la solution de l'équation homogène $(x^2-1)y' + 2xy = 0$.

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= Ke^{-\int \frac{2x}{x^2-1}dx} \\
&= Ke^{-\ln(x^2-1)} \\
&= K\frac{1}{e^{\ln(x^2-1)}} \\
&= \frac{K}{x^2-1}
\end{aligned}$$

On va noter y_p la solution particulière de (E). Vu la forme de l'équation (E), il n' y a pas de forme simple de y_p qu'on peut cherhcer. Donc on va utiliser la méthode de la variation de la constante. Donc la solution particulière va prendre la forme de la solution homogène en variant la constante K par une fonction $K(x)$. Donc on cherche y_p sous la forme suivante $y_p(x) = \dfrac{K(x)}{x^2-1}$.

y_p est une solution de (E) donc elle vérifie l'équation (E). C'est à dire $(x^2-1)y_p' + 2xy_p = xe^x$.

On a $y_p'(x) = \dfrac{K'(x)(x^2-1) - 2xK(x)}{(x^2-1)^2}$. Donc on le remplaçant on trouve

$$(x^2-1)\frac{K'(x)(x^2-1) - 2xK(x)}{(x^2-1)^2} + 2x\frac{K(x)}{x^2-1} \quad = xe^x$$

$$\begin{aligned} K'(x) - 2x\frac{K(x)}{x^2-1} + 2x\frac{K(x)}{x^2-1} &= xe^x \\ K'(x) &= xe^x \end{aligned}$$

Donc $K(x) = \int xe^x\, dx$.

$$\begin{aligned} \int x e^x\, dx &= x e^x - \int e^x\, dx, \qquad \text{(intégration par partie)} \\ &= x e^x - e^x \end{aligned}$$

Donc $K(x) = x e^x - e^x$. Donc en remplaçant $K(x)$ dans y_p, on trouve que $y_p(x) = \dfrac{x e^x - e^x}{x^2-1}$

La solution générale est la somme de la solution homogène et de la solution particulière. Donc

$$y(x) = \frac{x e^x - e^x}{x^2-1} + \frac{K}{x^2-1}$$

Puisque dans (E) il y a la condition $y(0) = 1$ à verifier, on va calculer l'image de 0 par y dans la solution générale.

$y(0) = 1 - K$ donc $1 - K = 1$ donc $K = 0$ Donc la solution générale du problème (E) est

$$y(x) = \frac{x e^x - e^x}{x^2-1}$$

2. On va résoudre les équations différentielles suivantes

i) On commence par résoudre $y'' - 2y' = -4x - 2$.

On va noter y_0 la solution de l'équation homogène $y'' - 2y' = 0$. L'éqution caractéristique est $r^2 - 2r = 0$. Donc il y a deux solutions différentes $r_1 = 0$ et $r_2 = 2$. Donc la solution homogène s'écrit sous la forme suivante $y_0(x) = \lambda e^{0x} + \beta e^{2x}$. C'est à dire

$$y_0(x) = \lambda + \beta e^{2x}$$

On va noter y_p la solution particulière de (E) . On a le second membre égale à $-4x - 2$ qui s'écrit sous la forme suivante $P(x)e^{\alpha x}$ avec $\alpha = 0$ et $P(x) = -4x - 2$.

Puisque $\alpha = 0$ est une solution de l'équation caractéristique alors on va chercher y_p sous la forme suivante $y_p(x) = xQ(x)e^{0x}$, avec degré(Q)=degré(-4x-2)=1. Donc $y_p(x) = x(ax + b)$ c'est à dire $y_p(x) = ax^2 + bx$

y_p est une solution de (E) donc elle vérifie l'équation (E). C'est à dire $y_p'' - 2y_p' = -4x - 2$. On a

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2ax + b \\ y_p''(x) &= 2a \end{aligned}$$

En remplaçant y_p' et y_p'', on trouve que $2a - 4ax - 2b = -4x - 2$. C'est à dire $-4ax - 2b + 2a = -4x - 2$. Après identification, on trouve que $-4a = -4$ et $-2b + 2a = -2$. Donc $a = 1$ et $b = 2$. On conclut que $y_p(x) = x^2 + 2x$

La solution générale est la somme de la solution homogène et de la solution particulière. Donc

$$y(x) = x^2 + 2x + \lambda + \beta e^{2x}$$

ii) $y'' - 2y' = 2e^x$.

On a la même équation homogène que dans $i)$, donc on aura la même solution

$$y_0(x) = \lambda + \beta e^{2x}$$

On va noter y_p la solution particulière de (E) . On a le second membre égale à $2e^x$ qui s'écrit sous la forme suivante $P(x)e^{\alpha x}$ avec $\alpha = 1$ et $P(x) = 2$.

Puisque $\alpha = 1$ n'est pas une solution de l'équation caractéristique alors on va chercher y_p sous la forme suivante $y_p(x) = Q(x)e^x$, avec degré(Q)=degré(2)=0. Donc $y_p(x) = ae^x$
y_p est une solution de (E) donc elle vérifie l'équation (E). C'est à dire $y_p^{''} - 2y_p^{'} = 2e^x$. On a

$$\begin{aligned} y_p^{'}(x) &= ae^x \\ y_p^{''}(x) &= ae^x \end{aligned}$$

En remplaçant $y_p^{'}$ et $y_p^{''}$, on trouve que $ae^x - 2ae^x = 2e^x$. C'est à dire $-ae^x = 2e^x$.
Après identification, on trouve que $a = -2$. On conclut que $y_p(x) = -2e^x$
La solution générale est la somme de la solution homogène et de la solution particulière. Donc

$$y(x) = -2e^x + \lambda + \beta e^{2x}$$

iii) $y'' - 2y' = -4x - 2 + 2e^x$.
On a la même équation homogène que dans i), donc on aura la même solution

$$y_0(x) = \lambda + \beta e^{2x}$$

.
Pour la solution particulière, on remarque que le second membre $-4x - 2 + 2e^x$ de iii) est la somme des seconds membres de i) $-4x - 2$ et ii) $2e^x$. Donc la solution particulière de iii) est la somme des solutions particulières de i) et de ii). Donc

$$y_p(x) = -2e^x + x^2 + 2x$$

On conclut que la solution générle est la somme de la solution homogène et de la solution particulière. C'est à dire

$$y_p(x) = -2e^x + x^2 + 2x + \lambda + \beta e^{2x}$$

Faculté polydisciplinaire de Taroudant
Filières : Agro/BV/IZPA
Pr. A. AZZOUZI

1.2. Examen d'Analyse (03/01/2013) – (Durée 1h30)

Exercice 1 Questions de cours

Soient x, y, z des nombres réels.

1. Donner la formule de Taylor-Young et Taylor-Lagrange (cette question ne rentre pas dans le programme de 2018/2019) .
2. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, simplifier les écritures suivantes :
   a) : $|-x|$ b) : $e^{-\ln x}$ c) : $\min\{x, x-y\}$ d) : $|x-|x||$.

Exercice 2 les questions de 4 à 7 ne rentrent pas dans le programme de 2018/2019

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{e^x - x}$

1. Montrer que pour tout réel x on a : $e^x > x$
2. Déterminer le (ou les) point d'extremum de la fonction f.
3. Construire le tableau de variation de la fonction f et déduire si le (ou les) point d'extremum de f est global ou pas ?
4. Déterminer le Développement limité de la fonction f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
5. Etudier la position du graphe de la fonction f et de sa tangente au point 0.
6. La fonction f est-elle concave ou convexe au voisinage de 0 ?
7. Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{e^x - x} - 1}{x^2}$

Exercice 3

1. Résoudre, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, le problème différentiel suivant :
$$xy' + y = \frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 2.$$
2. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   - i) $4y'' - y = e^x$.
     ii) $4y'' - y = e^{\frac{1}{2}x}$.
     iii) $4y'' - y = e^x + e^{\frac{1}{2}x}$.
3. Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{\sqrt{x} + 3x}\, dx$

1.2.a. Examen d'Analyse (03/01/2013) : Correction

Exercice 1 Questions de cours

Soient x, y, z des nombres réels.

1. On va donner la formule de Taylor-Young et Taylor-Lagrange
   a) la formule de Taylor-Young
   Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et soit $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$ on a :
   $$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{(x-a)^n \varepsilon(x)}_{\text{Retse}},}$$
   où ε est une fonction définie sur I telle que $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.
   b) la formule de Taylor-Lagrange
   Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) et soit $a, x \in I$. Il existe un réel c entre a et x tel que :
   $$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{Retse}}}$$
2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on va simplifier les écritures suivantes :
   a) : $|-x|$ b) : $e^{-\ln x}$ c) : $\min\{x, x-y\}$ d) : $|x - |x||$.

a) $|-x| = |x|$

b) $e^{-\ln x} = \dfrac{1}{x}$

c) si $y \leq 0$ alors $x \leq x - y$ donc
$$\min\{x, x-y\} = x$$
si $y > 0$ alors $x - y \leq x$ donc
$$\min\{x, x-y\} = x - y$$

d) $|x - |x|| = -x + |x|$ (car $x \leq |x|$)

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{e^x - x}$

1. On va montrer que pour tout réel x on a : $e^x > x$
   On prend la fonction g qu'on définit par $g(x) = e^x - x$. On étudie le signe de la fonction g
   On a $g'(x) = e^x - 1$. On a le tableau de variation de g est donné par

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   D'après le tableau de variation, on déduit que $g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Donc on pour tout réel x on a : $e^x > x$
2. On va déterminer le (ou les) point d'extremum de la fonction f.
   On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{e^x - x}\right)' \\ &= \frac{(e^x - x)'}{2\sqrt{e^x - x}} \\ &= \frac{e^x - 1}{2\sqrt{e^x - x}} \end{aligned}$$

Le seul point où f' s'annule est $x = 0$. Donc 0 est le seul point extremum de la fonction f. Et puisque f' est positive quand $x > 0$ et négative quand $x < 0$ alors 0 est un minimum de f

3. Construire le tableau de variation de la fonction f et déduire si le (ou les) point d'extremum de f est global ou pas ?

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variation, on déduit que 0 est un minimum global.

4. On va déterminer le Développement limité de la fonction f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
Soit h une fonction de classe $\mathbb{C}^2$. Son développement limité d'ordre 2 en 0 est le suivant
$h(x) = h(0) + h'(0)(x-0) + \frac{h''(a)}{2!}(x-0)^2 + o(x-0)^2$, donc
$\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc
$\mathrm{e}^x - x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc
$\sqrt{\mathrm{e}^x - x} = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}$,
On pose $u = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. Quand x tend vers 0 alors u tend aussi vers 0
On $\sqrt{u+1} = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + o(u^2)$,
$u = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \implies u^2 = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc on va remplacer la variable u par x

$$\sqrt{\mathrm{e}^x - x} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \tag{1.2}$$

5. On va etudier la position du graphe de la fonction f et de sa tangente au point 0.
D'après l'équation 1.2 on déduit que la tangente de f au point 0 est donnée par $T_f = 1$.

Pour comparer f et sa tangente on va calculer leur différence.
$f(x) - T_f = \underbrace{\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}_{>0}$
donc $f(x) > T_f$ et par suite on constate que la courbe de la fonction f est dessus de sa tangente au voisinage de 0.

6. La fonction f est-elle concave ou convexe au voisinage de 0 ?
D'après l'équation 1.2 on déduit que $f''(0) = 1$.
Puisque $f''(0) > 0$ alors f est convexe au voisinage de 0

7. On va calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{e^x - x} - 1}{x^2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{e^x-x}-1}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}+o(1)\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. On va résoudre, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, le problème différentiel suivant :

$$xy'+y=\frac{\ln x}{x}, \quad y(1)=2.$$

On va noter y_0 la solution de l'équation homogène $xy'+y=0$.

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= Ke^{-\int \frac{1}{x}dx}\\
&= Ke^{-\ln x}\\
&= K\frac{1}{e^{\ln x}}\\
&= \frac{K}{x}
\end{aligned}$$

On va noter y_p la solution particulière de (E). Vu la forme de l'équation (E), il n' y a pas de forme simple de y_p qu'on peut cherhcer. Donc on va utiliser la méthode de la variation de la constante. Donc la solution particulière va prendre la forme de la solution homogène en variant la constante K par une fonction $K(x)$. Donc on cherche y_p sous la forme suivante $y_p(x)=\dfrac{K(x)}{x}$.

y_p est une solution de (E) donc elle vérifie l'équation (E). C'est à dire $xy_p^{'}+y_p=\dfrac{\ln x}{x}$.

On a $y_p^{'}(x)=\dfrac{xK'(x)-K(x)}{x^2}$. Donc on le remplaçant on trouve

$$\begin{aligned}
x\frac{xK'(x)-K(x)}{x^2}+\frac{K(x)}{x} &= \frac{\ln x}{x}\\
K'(x)-\frac{K(x)}{x}+\frac{K(x)}{x} &= \frac{\ln x}{x}\\
K'(x) &= x\frac{\ln x}{x}
\end{aligned}$$

Donc $K(x)=\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x}\,dx &= \int (\ln x)'\ln x\,dx,\\
&= \frac{1}{2}(\ln x)^2
\end{aligned}$$

Donc $K(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$. Donc en remplaçant $K(x)$ dans y_p, on trouve que $y_p(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{2x}$

La solution générale est la somme de la solution homogène et de la solution particulière. Donc

$$y(x)=\frac{(\ln x)^2}{2x}+\frac{K}{x}$$

Puisque dans (E) il y a la condition $y(1)=2$ à verifier, on va calculer l'image de 1 par y dans la solution générale.
$y(1)=K$ donc $K=2$. Donc la solution générale du problème (E) est

$$y(x)=\frac{(\ln x)^2}{2x}+\frac{2}{x}$$

2. On va résoudre les équations différentielles suivantes
i) On commence par $4y''-y=e^x$.
On va noter y_0 la solution de l'équation homogène $4y''-y=0$. L'éqution caractéristique est $4r^2-1=0$. Donc il y a deux solutions différentes $r_1=\frac{-1}{2}$ et $r_2=\frac{1}{2}$. Donc la solution homogène s'écrit sous la forme suivante

$$y_0(x)=\lambda e^{\frac{-1}{2}x}+\beta e^{\frac{1}{2}x}$$

On va noter y_p la solution particulière de (E). On a le second membre égale à $2e^x$ qui s'écrit sous la forme suivante $P(x)e^{\alpha x}$ avec $\alpha=1$ et $P(x)=2$.
Puisque $\alpha=1$ n'est pas une solution de l'équation caractéristique alors on va chercher y_p sous la forme suivante $y_p(x)=Q(x)e^x$, avec degré(Q)=degré(2)=0. Donc $y_p(x)=ae^x$
y_p est une solution de (E) donc elle vérifie l'équation (E). C'est à dire $y_p''-2y_p'=2e^x$. On a

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= ae^x \\ y_p''(x) &= ae^x \end{aligned}$$

En remplaçant y_p' et y_p'', on trouve que $ae^x-2ae^x=2e^x$. C'est à dire $-ae^x=2e^x$.
Après identification, on trouve que $a=-2$. On conclut que $y_p(x)=-2e^x$
La solution générale est la somme de la solution homogène et de la solution particulière. Donc

$$y(x)=-2e^x+\lambda e^{\frac{-1}{2}x}+\beta e^{\frac{1}{2}x}$$

ii) $4y''-y=e^{\frac{1}{2}x}$.
On a la même équation homogène que dans $i)$, donc on aura la même solution
Donc la solution homogène s'écrit sous la forme suivante

$$y_0(x)=\lambda e^{\frac{-1}{2}x}+\beta e^{\frac{1}{2}x}$$

On va noter y_p la solution particulière de (E). On a le second membre égale à $e^{\frac{1}{2}x}$ qui s'écrit sous la forme suivante $P(x)e^{\alpha x}$ avec $\alpha=\frac{1}{2}$ et $P(x)=1$.
Puisque $\alpha=\frac{1}{2}$ est une racine simple de l'équation caractéristique alors on va chercher y_p sous la forme suivante $y_p(x)=xQ(x)e^{\frac{1}{2}x}$, avec degré(Q)=degré(1)=0. Donc $y_p(x)=axe^{\frac{1}{2}x}$
y_p est une solution de (E) donc elle vérifie l'équation (E). C'est à dire $4y_p''-y_p'=e^{\frac{1}{2}x}$. On a

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \frac{1}{2}axe^{\frac{1}{2}x}+ae^{\frac{1}{2}x} \\ y_p''(x) &= \frac{1}{4}axe^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}ae^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}ae^{\frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

En remplaçant y_p' et y_p'', on trouve que $axe^{\frac{1}{2}x}+4ae^{\frac{1}{2}x}-axe^{\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x}$. C'est à dire $4ae^{\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}}$.
Après identification, on trouve que $a=\frac{1}{4}$. On conclut que $y_p(x)=\frac{1}{4}xe^{\frac{1}{2}x}$
La solution générale est la somme de la solution homogène et de la solution particulière. Donc

$$y(x)=\frac{1}{4}xe^{\frac{1}{2}x}+\lambda e^{\frac{-1}{2}x}+\beta e^{\frac{1}{2}x}$$

iii) $4y'' - y = e^x + e^{\frac{1}{2}x}$.
On a la même équation homogène que dans i), donc on aura la même solution. Donc la solution homogène s'écrit sous la forme suivante

$$y_0(x) = \lambda e^{\frac{-1}{2}x} + \beta e^{\frac{1}{2}x}$$

Pour la solution particulière, on remarque que le second membre $e^x + e^{\frac{1}{2}x}$ de iii) est la somme des seconds membres de i) e^x et ii) $e^{\frac{1}{2}x}$. Donc la solution particulière de iii) est la somme des solutions particulières de i) et de ii). Donc

$$y_p(x) = -2e^x + \frac{1}{4}xe^{\frac{1}{2}x}$$

On conclut que la solution génerle est la somme de la solution homogène et de la solution particulière. C'est à dire

$$y_p(x) = -2e^x + \frac{1}{4}xe^{\frac{1}{2}x} + \lambda e^{\frac{-1}{2}x} + \beta e^{\frac{1}{2}x}$$

3. On va calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{\sqrt{x}+3x}\,dx$

   On calcule $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{\sqrt{x}+3x}\,dx$, en utilisant le changement de variable suivant $u = sqrtx$.
   $u = \sqrt{x} \implies x = u^2 \implies dx = 2u\,du$.
   Quand $x = 1$ alors $u = 1$ et quand $x = 2$ alors $u = \sqrt{2}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{2}{\sqrt{x}+3x}\,dx &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2}{u+3u^2}\,2u\,du \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{4}{1+3u}\,du \\
&= \frac{4}{3}\big[\ln(1+3u)\big]_1^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{4}{3}\Big(\ln(1+3\sqrt{2}) - \ln(4)\Big)
\end{aligned}$$

Faculté polydisciplinaire de Taroudant
Filières : Agro/BV/IZPA
Pr. A. AZZOUZI

1.3. Examen d'Analyse (17/01/2014) – (Durée 1h30)

Exercice 1 Questions de cours

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Donner la définition de : a) la dérivée de f au point d'abscice x_0, b) la primitive de f, c) l'intégrale de f entre les points d'abscices a et b.
2. Quelle signification on peut donner à la dérivée de f au point d'abscice x_0 et à l'intégrale de f entre les points d'abscices a et b.
3. Soit f une fonction négative sur $\mathbb{R}$. Simplifier les écritures suivantes
   a) $|f(x)|$, b) $|-f(x)|$, c) $|e^{f(x)}|$, d) $|f^2(x)|$, e) $|f^3(x)|$, f) $|f(x)-x^2|$,
   g) $\max\{f(x),-f(x)\}$, h) $\min\{f(x),2f(x)\}$.
4. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction h comme composée
   de f et g. Donner la formule de la dérivée seconde de h. c'est à dire $(fog)''(x)$.

Exercice 2 cet exercice ne rentre pas dans le programme de 2018/2019

1. Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{3x}$, b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sin x)^8}{x^7}$
2. En utilisant deux méthodes différentes calculer la limite suivante $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$
3. Calculer les intégrales suivantes : a) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(4x)\,dx$, b) $\displaystyle\int_1^2\frac{-3}{2x+\sqrt{x}}\,dx$
4. Montrer que $\dfrac{x^3-3x^2+1}{1-x}=-x^2+2x+2+\dfrac{1}{x-1}$ (Il faut commencer par le terme de gauche pour montrer l'égalité avce le terme de droite). En déduire $\displaystyle\int\frac{x^3-3x^2+1}{1-x}\,dx$.
5. Soit $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$. Déterminer le Développement limité de la fonction f à l'ordre 3 au voisinage de 0 et étudier la position du graphe de la fonction f et de sa tangente au point 0.

Exercice 3

Chez les êtres vivants la vitesse relative de croissance d'un organe au cours du temps peut très souvent être représentée sous la forme suivante. $\dfrac{x'(t)}{x(t)}=\dfrac{cre^{-rt}}{1-e^{-rt}}$ (P).

où x représente la mesure de l'organe (taille ou poids par exemple) et t représente le temps mesuré à partir du début de l'existence de l'organe. c et r sont des constantes strictement positives dont les valeurs dépendent de l'organe considéré.

1. Que preprésente $x'(t)$? (sachant que $x(t)$ représente la mesure de l'organe et $\dfrac{x'(t)}{x(t)}$ représente la vitesse relative de croissance d'un organe au cours du temps).
2. Monter en intégrant la formule (P) que $x(t)=\lambda(1-e^{-rt})^c$ où λ est une constante strictement positive.
3. Calculer $x'(t)$ et $x''(t)$
4.) Etudier le signe de $(ce^{-rt}-1)$ et en déduire la convexité de x
5. Trouver le point d'inflexion de x (c'est le point x_i où la fonction x'' change de signe). En déduire que le rapport $\dfrac{x_i}{\lambda}$ n'est jamais supérieur à $\dfrac{1}{e}$.

1.3.a. Examen d'Analyse (17/01/2014) : Correction

Exercice 1 Questions de cours

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On va donner la définition de : a) la dérivée de f au point d'abscice x_0, b) la primitive de f, c) l'intégrale de f entre les points d'abscices a et b.

   a) Une fonction f est dérivable en x_0 si le taux de variation $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$ Ainsi
   $$f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

   b) Une primitive de f est une fonction dérivable notée F qui vérifie $F'(x) = f(x)$.

   c) Si F est une primitive de f alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

2. On va donner une signification à la dérivée de f au point d'abscice x_0 et à l'intégrale de f entre les points d'abscices a et b.
   $f'(x_0)$ représente la pente de la courbe de la fonction f au point d'abscisse x_0 et l'intégrale d'une fonction f entre deux points d'abscisses a et b notée par $\int_a^b f(t)\,dt$ représente l'aire de la surface située entre la courbe de la fonction f, les droites verticales $x = a$, $x = b$ et la droire horizontale $y = 0$.

3. Soit f une fonction négative sur $\mathbb{R}$. Simplifier les écritures suivantes
   a) $|f(x)|$, b) $|-f(x)|$, c) $|e^{f(x)}|$, d) $|f^2(x)|$, e) $|f^3(x)|$, f) $|f(x)-x^2|$,
   g) $\max\{f(x), -f(x)\}$, h) $\min\{f(x), 2f(x)\}$.

   a) $|f(x)| = -f(x)$ car $f(x) \leq 0$
   b) $|-f(x)| = -f(x)$ car $-f(x) \geq 0$
   c) $|e^{f(x)}| = e^{f(x)}$ car $e^{f(x)} \geq 0$
   d) $|f^2(x)| = f^2(x)$ car $f^2(x) \geq 0$
   e) $|f^3(x)| = -f^3(x)$ car $f^3(x) \leq 0$
   f) $|f(x)-x^2| = -f(x)+x^2$ car $f(x)-x^2 \leq 0$
   g) $\max\{f(x), -f(x)\} = -f(x)$ car $f(x) \leq -f(x)$
   h) $\min\{f(x), 2f(x)\} = 2f(x)$ car $2f(x) \leq f(x)$

4. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction h comme composée de f et g. Donner la formule de la dérivée seconde de h. c'est à dire $(fog)''(x)$.
   $$\begin{aligned}(fog)''(x) &= ((fog)')'(x)\\ &= (f'(g(x)) \times g'(x))'\\ &= f''(g(x)) \times g'(x) + f'(g(x)) \times g''(x)\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Calculer les limites suivantes : a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{3x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^8}{x^7}$

   a) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{3x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{3x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{3x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -\frac{x\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{3x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} -\frac{\sqrt{(1-\frac{1}{x^2})}}{3}$$
$$= \frac{-1}{3}$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^8}{x^7} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\times(\sin x)^7}{x^7}$$
$$= \lim_{x\to 0}\sin x\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^7$$
$$= 0\times 1 \qquad (\text{car } \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\ )$$
$$= 0$$

2. En utilisant deux méthodes différentes calculer la limite suivante $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

   a) Première méthode

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x} \quad (\text{On utilse la règle de l'Hospital})$$
$$= 2,$$

   b) Deuxième méthode

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x+o(x^2)} \quad (\text{On utilse la formule de développement limité})$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x+o(x)}{x+o(x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x+o(x)}{x+o(x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2+o(1)}{1+o(1)}$$
$$= 2,$$

3. Calculer les intégrales suivantes : a) $\int_0^{\pi}\cos(4x)\,dx$, b) $\int_1^2\frac{-3}{2x+\sqrt{x}}\,dx$

a) $$\int_0^{\pi}\cos(4x)\,dx = [\frac{1}{4}\sin(4x)]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{4}(\sin(4\pi)-\sin(0))$$
$$= 0$$

b) On calcule l'intégrale $\int_1^2 \frac{-3}{2x+\sqrt{x}}\,dx$ en utilisant le changement de variable suivant $u=\sqrt{x}$.
$u=\sqrt{x} \implies x=u^2 \implies dx=2u\,du.$
Quand $x=1$ alors $u=1$ et quand $x=2$ alors $u=\sqrt{2}$. Donc

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{-3}{2x+\sqrt{x}}\,dx &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{-3}{u+2u^2}\,2u\,du\\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{-6}{1+2u}\,du\\ &= -3\big[\ln(1+2u)\big]_1^{\sqrt{2}}\\ &= -3(\ln(1+2\sqrt{2})-\ln(3))\end{aligned}$$

4. On va montrer que $\frac{x^3-3x^2+1}{1-x}=-x^2+2x+2+\frac{1}{x-1}$. Et on déduit $\int \frac{x^3-3x^2+1}{1-x}\,dx$.

$$\begin{aligned}\frac{x^3-3x^2+1}{1-x} &= \frac{(1-x)(-x^2+2x+2)+1}{1-x}\\ &= -x^2+2x+2+\frac{-1}{x-1}\end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-3x^2+1}{1-x}\,dx &= \int -x^2+2x+2+\frac{-1}{x-1}\,dx\\ &= -\frac{x^3}{3}+x^2+2x-\ln(x-1)+cste\end{aligned}$$

5. Soit $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$. On va déterminer le Développement limité de la fonction f à l'ordre 3 au voisinage de 0 et on étudie la position du graphe de la fonction f et de sa tangente au point 0.

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\\ &= \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}-1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)}\\ &= \frac{2x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)}\\ &= \frac{2+\frac{x^2}{3}+o(x^3)}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}\\ &= 2+\frac{2x^2}{3}+o(x^3) \qquad \text{(En utilisant la division euclidienne)}\end{aligned}$$

Exercice 3

Chez les êtres vivants la vitesse relative de croissance d'un organe au cours du temps peut très souvent être représentée sous la forme suivante. $\dfrac{x'(t)}{x(t)} = \dfrac{cre^{-rt}}{1-e^{-rt}}$ (P).

où x représente la mesure de l'organe (taille ou poids par exemple) et t représente le temps mesuré à partir du début de l'existence de l'organe. c et r sont des constantes strictement positives dont les valeurs dépendent de l'organe considéré.

1. Que preprésente $x'(t)$? (sachant que $x(t)$ représente la mesure de l'organe et $\dfrac{x'(t)}{x(t)}$ représente la vitesse relative de croissance d'un organe au cours du temps).
   $x'(t)$ représente la vitesse de croissance d'un organe au cours du temps.
2. On va monter en intégrant la formule (P) que $x(t) = \lambda(1-e^{-rt})^c$ où λ est une constante strictement positive.
   On a
   $$\frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{cre^{-rt}}{1-e^{-rt}}.$$
   Donc on va integrer les deux termes de la l'égalité ci dessus pour trouver
   $$\int \frac{x'(t)}{x(t)} = \int \frac{cre^{-rt}}{1-e^{-rt}}$$
   On déduit que
   $$\begin{aligned} \ln(x(t)) &= c\ln(1-e^{-rt}) + cste \\ \ln(x(t)) &= \ln(1-e^{-rt})^c + cste \end{aligned}$$
   En appliquant l'exponentielle, on trouve
   $x(t) = \lambda(1-e^{-rt})^c$ où λ est une constante strictement positive.
3. Calculer $x'(t)$ et $x''(t)$
   $$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda\left((1-e^{-rt})^c\right)' \\ &= \lambda c(1-e^{-rt})^{c-1}(1-e^{-rt})' \\ &= \lambda cr(1-e^{-rt})^{c-1}e^{-rt} \end{aligned}$$
   $$\begin{aligned} x''(t) &= \lambda cr\left((1-e^{-rt})^{c-1}e^{-rt}\right)' \\ &= \lambda cr\left[\left((1-e^{-rt})^{c-1}e^{-rt}\right)'\right] \\ &= \lambda cr\left[r(c-1)(e^{-rt})^2(1-e^{-rt})^{c-2} - re^{-rt}(1-e^{-rt})^{c-1}\right] \\ &= \lambda cr^2e^{-rt}(1-e^{-rt})^{c-2}\left[(c-1)e^{-rt} - (1-e^{-rt})\right] \end{aligned}$$
4. Etudier le signe de $(ce^{-rt}-1)$ et en déduire la convexité de x
5. Trouver le point d'inflexion de x (c'est le point x_i où la fonction x'' change de signe). En déduire que le rapport $\dfrac{x_i}{\lambda}$ n'est jamais supérieur à $\dfrac{1}{e}$.

Faculté polydisciplinaire de Taroudant
Filières : Agro/BV/IZPA
Pr. A. AZZOUZI

1.4. Examen d'Analyse (23/01/2015) – (Durée 1h30)

Exercice 1 Questions de cours

Soient x, y, z des nombres réels.

1. Donner la définition de la dérivée d'une foncton f en un point d'abscisse x_0. Faire un dessin et expliquer ce que représente cette dérivée.
2. Donner la définition de l'intégrale d'une fonction f entre deux points d'abscisses a et b. Faire un dessin et expliquer ce que représente cette intégrale.
3. Soit f une fonction négative sur $\mathbb{R}$. Simplifier en justifiant votre réponse les écritures suivantes
   a) $|f(x)|$, b) $|-f(x)|$, c) $|e^{f(x)}|$, d) $|f^2(x)|$, e) $|f^3(x)|$, f) $|f(x)-x^2|$,

Exercice 2

Soient les quatres assertions suivantes :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad x+2>0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad x-3>0 \quad ;$$
$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2+2x+1 \geq 0 \quad ; \quad (d)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2+2x+1>0$$

1. Donner la négation des assertions (a), (b), (c) et (d) .
2. Les assertions (a), (b), (c) et (d) sont-elles vraies ou fausses ?

Exercice 3

Déterminez les limites suivantes

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-2} \frac{x^2+x-2}{(x-3)(x+2)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{10}}{e^x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (3-\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+3})$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} \frac{1}{x^2-1}$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^2+3x^4}$

1. Déterminer le domaine de définition de f et construire le tableau de variation de f
2. En justifiant votre réponse, déterminer le(s) extremas locaux et globaux de f

Exercice 5

1. Calculer les intégrales et primitives suivantes
   (a) $\displaystyle\int x^2+\frac{1}{x}+e^x+\sin x \quad dx$, (b) $\displaystyle\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$,
2. Utiliser le fait que $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$ pour calculer la valeur de $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2(x)\,dx$
3. Soit $x>e$, Montrer par deux méthodes différentes que la fonction $x \longrightarrow \ln(\ln x)$ est une primitive de la fonction $x \longrightarrow \dfrac{1}{x\ln x}$.

Exercice 6

La masse d'un isotope radioactif suit en fonction du temps la loi suivante $m(t)=m_0(\frac{1}{2})^{\frac{t}{\tau}}$ où m_0 est sa masse initiale et τ une constante positive. Montrer que cet isotope radioactif décroit à un taux proportionnel de sa masse courante. Donner la valeur (en fonction de τ) de ce taux ?

Exercice 7

La vitesse d'un objet en mouvement rectiligne est donnée à tout instant t par $v(t)=t^2e^{-t}$ en (m/s).
Quelle distance a-t-il parcouru entre l'instant $t=0$ et l'instant $t=T$?

1.4.a. Examen d'Analyse (23/01/2015) : Correction

Exercice 1 Questions de cours

Soient x, y, z des nombres réels.

1. On donne la définition de la dérivée d'une foncton f en un point d'abscisse x_0. Une fonction f est dérivable en x_0 si le taux de variation $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$ Ainsi
$$f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$f'(x_0)$ représente la pente de la courbe de la fonction f au point d'abscisse x_0
2. On va donner la définition de l'intégrale d'une fonction f entre deux points d'abscisses a et b.
Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$.
l'intégrale d'une fonction f entre deux points d'abscisses a et b notée par $\int_a^b f(t)\,dt$ représente l'aire de la surface située entre la courbe de la fonction f, les droites verticales $x=a$, $x=b$ et la droire horizontale $y=0$.
3. Soit f une fonction négative sur $\mathbb{R}$. On va simplifier les écritures suivantes
a) $|f(x)|$, b) $|-f(x)|$, c) $|e^{f(x)}|$, d) $|f^2(x)|$, e) $|f^3(x)|$, f) $|f(x)-x^2|$,

a) $|f(x)| = -f(x)$ car $f(x)\leq 0$
b) $|-f(x)| = -f(x)$ car $-f(x)\geq 0$
c) $|e^{f(x)}| = e^{f(x)}$ car $e^{f(x)}\geq 0$
d) $|f^2(x)| = f^2(x)$ car $f^2(x)\geq 0$
e) $|f^3(x)| = -f^3(x)$ car $f^3(x)\leq 0$
f) $|f(x)-x^2| = -f(x)+x^2$ car $f(x)-x^2\leq 0$

Exercice 2

Soient les quatres assertions suivantes :
$$(a)\ \exists x\in\mathbb{R}\quad x+2>0 \quad ; \quad (b)\ \forall x\in\mathbb{R}\quad x-3>0 \quad ;$$
$$(c)\ \forall x\in\mathbb{R}\quad x^2+2x+1\geq 0 \quad ; \quad (d)\ \forall x\in\mathbb{R}\quad x^2+2x+1>0$$

1. On va donner la négation des assertions (a), (b), (c) et (d) .
   a) $\forall x\in\mathbb{R}\quad x+2\leq 0$
   b) $\exists x\in\mathbb{R}\quad x-3\leq 0$
   c) $\exists x\in\mathbb{R}\quad x^2+2x+1<0$
   d) $\exists x\in\mathbb{R}\quad x^2+2x+1\leq 0$
2. On va répondre si Les assertions (a), (b), (c) et (d) sont vraies ou fausses
   a) L'assertion est vrai : par exemple pour $x=3$ on a $3+2>0$
   b) L'assertion est fausse : car il existe $x=2$ tel que $2-3<0$
   c) L'assertion est vrai : car $x^2+2x+1=(x+1)^2\geq 0$
   d) L'assertion est fausse : car car il existe $x=-1$ tel que $(-1)^2+2\times(-1)+1=0$

Exercice 3

On va déterminez les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{(x-3)(x+2)}$ (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^{10}}{e^x}$ (c) $\lim\limits_{x\to -\infty} (3-\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+3})$ (d) $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1}$

a) $$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{(x-3)(x+2)} \quad \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(x+2)}$$
$$\lim_{x\to -2} \frac{(x-1)}{(x-3)} \qquad \text{(On simplifie par } x+2\text{)}$$
$$= \frac{3}{5}$$

b) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{10}}{e^x} \quad 0 \quad \text{(car en } +\infty \text{ l'exponentielle l'emporte sur la puissance)}$$

c) $$\lim_{x\to -\infty} \left(3 - \frac{\sqrt{x^2+2}}{x+3}\right) = \lim_{x\to -\infty} \left(3 - \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x^2})}}{x+3}\right)$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \left(3 - \frac{|x|\sqrt{(1+\frac{2}{x^2})}}{x+3}\right)$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \left(3 - \frac{-x\sqrt{(1+\frac{2}{x^2})}}{x+3}\right) \quad \text{(On a } |x| = -x\text{) car } x \text{ tend vers } -\infty\text{)}$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \left(3 + \frac{\sqrt{(1+\frac{2}{x^2})}}{1+\frac{3}{x}}\right)$$
$$= 4$$

d) $$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1} = -\infty \quad \text{(car } x \longrightarrow -1^+ \implies x^2-1 \longrightarrow 0^-\text{)}$$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2+3x^4}$

1. Déterminer le domaine de définition de f et construire le tableau de variation de f

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad f(x) \text{ soit bien définie}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad \sqrt{x^2+3x^4} \text{ soit bien définie}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad x^2+3x^4 \geq 0 \quad \} \\ &= \mathbb{R} \qquad \text{(car } \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2+3x^4 \geq 0 \text{)} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. On va déterminer le(s) extremas locaux et globaux de f
   On remarque d'après le tableau de variation que 0 est un minimum local et même global.
   D'après le tableau de variation il n'y a aucun maximum local pour la fonction f

Exercice 5

1. On va calculer les intégrales et primitives suivantes
   (a) $\displaystyle\int x^2+\frac{1}{x}+e^x+\sin x \quad dx,$ (b) $\displaystyle\int_0^2 xe^{x^2}\,dx,$

   a) $$\int x^2+\frac{1}{x}+e^x+\sin x \quad dx = \frac{x^3}{3}+\ln x+e^x-\cos x + \text{cste}$$

   b) $$\begin{aligned}\int_0^2 xe^{x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2)'e^{x^2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_1^2\\ &= \frac{1}{2}\left(e^4-e\right)\end{aligned}$$

2. On va utiliser le fait que $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2(x)\,dx=\frac{\pi}{4}$ pour calculer la valeur de $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2(x)\,dx$

   $$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2(x)\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\sin^2(x))\,dx \quad (\text{car } \sin^2 x+\cos^2 x=1)\\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}1\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2(x)\,dx\\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} \qquad (\text{car } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2(x)\,dx=\frac{\pi}{4})\\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

3. Soit $x>e$, On va montrer par deux méthodes différentes que la fonction $x\longrightarrow\ln(\ln x)$ est une primitive de la fonction $x\longrightarrow\dfrac{1}{x\ln x}$.
   a) Première méthode
      On va calucler la dérivée de $\dfrac{1}{x\ln x}$

      $$\begin{aligned}(\ln(\ln x))' &= \frac{(\ln x)'}{(\ln x)}\\ &= \frac{1}{(x\ln x)}\end{aligned}$$

b) Deuxième méthode

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\ln x}\quad dx &= \int \frac{(\ln x)'}{\ln x}\quad dx\\ &= \ln(\ln x)\text{+cste}\end{aligned}$$

Exercice 6

On va montrer que l'isotope radioactif définie $m(t) = m_0(\frac{1}{2})^{\frac{t}{\tau}}$ décroit à un taux proportionnel de sa masse courante.

$$\begin{aligned}m'(t) &= \left(m_0(\tfrac{1}{2})^{\frac{t}{\tau}}\right)'\\ &= \left(m_0 \mathrm{e}^{\frac{t}{\tau}\ln\frac{1}{2}}\right)'\\ &= \left(m_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}\ln 2}\right)'\\ &= -m_0\tfrac{\ln 2}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}\ln 2}\\ &= -\tfrac{\ln 2}{\tau}m(t)\end{aligned}$$

Puisque $m(t) > 0$ alors $m'(t) < 0$ ce qui montre que la fonction m est décroissante. En plus d'après la formule ci dessus on conclut que l'isotope radioactif $m(t)$ décroit à un taux proportionnel de sa masse courante.

Exercice 7

La vitesse d'un objet en mouvement rectiligne est donnée à tout instant t par $v(t) = t^2e^{-t}$ en (m/s).
On va calculer la distance parcouru par l'objet entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = T$?
La distance est donnée par $\int_0^t v(t)\,dt$

$$\begin{aligned}\int_0^T v(t)\,dt \quad & \int_0^T t^2e^{-t}\,dt\\ & \left[-t^2e^{-t}\right]_0^T + \int_0^T 2te^{-t}\,dt\\ & \left[-t^2e^{-t}\right]_0^T + \left[-2te^{-t}\right]_0^T + \int_0^T 2e^{-t}\,dt\\ &= \left[-t^2e^{-t}\right]_0^T + \left[-2te^{-t}\right]_0^T + \left[-2e^{-t}\right]_0^T\\ &= -T^2e^{-T} - 2Te^{-T} - 2e^{-T} + 2\end{aligned}$$

Donc la distance parcouru par l'objet est $-T^2e^{-T} - 2Te^{-T} - 2e^{-T} + 2$

Faculté polydisciplinaire de Taroudant
Filières : Agro/BV/IZPA
Pr. A. AZZOUZI

1.5. Examen d'Analyse (08/01/2016) – (Durée 1h30)

Exercice 1 Questions de cours

Déterminez les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$ (c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$ (d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{e^{-x^3\sqrt{-x}}}{-x^3\sqrt{-x}}$ (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

Exercice 2

Soient $f_1(x) = \sqrt{e^x}$, $f_2(x) = e^{(1+\ln x)}$, $f_3(x) = \frac{e^{(1+\ln x)}}{x}$, $f_4(x) = e^{\sqrt{x}}$ et $f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

1. Donner le domaine de définition des fonctions ci dessus.
2. Calculer la dérivée des fonctions f_1 et f_2 et en déduire les primitives de f_1 et de f_3.
3. Simplifier la fonction f_2 et calculer la dérivée de f_2 simplifiée. Comparer les dérivées de f_2 et f_2 simplifiée
4. Trouver une relation entre $\frac{f_4'(x)}{f_4(x)}$ et $f_5(x)$. Calculer la primitive de $f_5(x)$ par deux méthodes différentes.
5. En utilisant le changement de variable, calculer $\displaystyle\int_1^2 f_5(x)\, dx$. Retrouver cette valeur en utilsant la question 4).

Exercice 3

On injecte un médicament par voie intraveineuse à un malade (ici une dose de $200ml$). Un dosage de concentration est effectué à divers instants (l'instant $t = 0$ correspond à la fin de l'injection). On désigne par $C(t)$ la concentration du médicament dans le sang à l'instant t. Après l'injection, Expérimentalement on trouve que la concentration suit les valeurs données dans le tableau ci-dessous (t en heures et C en mg/ml) :

t	0	1	2	4	6	8	12	16	20	24
$C(t)$	11.0	10.2	9.5	8.2	7.0	6.1	4.5	3.4	2.5	1.8

Dans la théorie, les checheurs pensent que la concentration C suit une loi exponentielle : $C(t) = Qe^{-\gamma t}$, où γ vaut 75.10^{-3}.

1. Quelle est la différence entre $C(t)$ donnée par le tableau et celle donné par la formule ?
2. En utilisant la formule de la fonction C et le tableau, donner la valeur de Q.
3. a) Donner le domaine de définition de la fonction $C(t)$. b) Donner l'intervalle sur lequel on va étudier cette fonction si on prend en considération le contexte biologique. c) Etudier dans ce contexte le tableau de variation de $C(t)$.
   d) Est-ce que les résultats obtenus sont en accord avec les mesures expérimentales (du tableau) ?
4. On note T l'intervalle de temps nécessaire pour que la concentration baisse jusqu'au tiers de sa valeur à l'instant t, c'est à dire $C(t+T) = C(t)/3$. Trouver la valeur de T. Est-ce en accord avec les valeurs du tableau ?
5. Le taux de croissance relatif est donné par $\frac{C'(t)}{C(t)}$. Trouver ce taux et déduire pourquoi on a un signe $-$ dans $C(t)$

Exercice 4

Une population d'animaux augmente à la vitesse de $200+50t$ (en individus/an,t étant en années). De combien la population a-t-elle augmentée entre la quatrième et la dixième année

1.5.a. Examen d'Analyse (08/01/2016) : Correction

Exercice 1 Questions de cours

Déterminez les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$ (c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$ (d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{e^{-x^3\sqrt{-x}}}{-x^3\sqrt{-x}}$ (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x}$

a)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} &= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\\ &= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\\ &= \lim_{x\to 4} \frac{1}{(\sqrt{x}+2)}\\ &= \frac{1}{4},\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{3}{2}\frac{\sin(3x)}{3x}\frac{2x}{\sin(2x)}\\ &= \frac{3}{2} \qquad \left(\text{car } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1\right)\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+1)}\\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-3)}{(x+1)}\\ &= \lim_{x\to 2} \frac{-1}{3}\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{-x^3\sqrt{-x}}}{-x^3\sqrt{-x}} \quad \lim_{t\to +\infty} \frac{e^t}{t} \quad (\text{car } \lim_{x\to -\infty} -x^3\sqrt{-x} = +\infty\ )\\ &+\infty \qquad \lim_{t\to +\infty} \frac{e^t}{t} \quad (\text{car l'exponentielle l'emporte sur les puissances en } +\infty\ )\end{aligned}$$

e) On a

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

.

Puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et d'après le théorème d'encadrement, on déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Exercice 2

1. On va donner le domaine de définition des fonctions ci dessus.

a) $$\begin{aligned} Df_1 &= \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad f(x) \text{ soit bien définie}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad \sqrt{e^x} \text{ soit bien définie}\} \\ &= \mathbb{R} \qquad\qquad (\text{car } \forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^x > 0\ ) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} Df_2 &= \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad f_2(x) \text{ soit bien définie}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad e^{(1+\ln x)} \text{ soit bien définie}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad x > 0 \quad \} \\ &= \mathbb{R}^{+*} \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} Df_3 &= \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad f_3(x) \text{ soit bien définie}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad \tfrac{e^{(1+\ln x)}}{x} \text{ soit bien définie}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad x > 0 \quad \} \\ &= \mathbb{R}^{+*} \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} Df_4 &= \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad f_4(x) \text{ soit bien définie}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad e^{\sqrt{x}} \text{ soit bien définie}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad x \geq 0 \quad \} \\ &= \mathbb{R}^{+} \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} Df_5 &= \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad f_5(x) \text{ soit bien définie}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad \tfrac{1}{\sqrt{x}} \text{ soit bien définie}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad x > 0 \quad \} \\ &= \mathbb{R}^{+*} \end{aligned}$$

2. On va calculer la dérivée des fonctions f_1 et f_2 et en déduire les primitives de f_1 et de f_3.

a) $$\begin{aligned}(f_1(x))' &= \left(\sqrt{e^x}\right)' \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{e^x}} \\ &= \frac{\sqrt{e^x}}{2}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}(f_2(x))' &= \left(e^{(1+\ln x)}\right)' \\ &= \frac{e^{(1+\ln x)}}{x}\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\int f_1(x)\,dx &= \int 2(f_1)'(x)\,dx \\ &= 2f_1(x) + cste\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}\int f_3(x)\,dx &= \int \frac{e^{(1+\ln x)}}{x}\,dx \\ &= \int (f_2(x))'\,dx \\ &= f_2(x) + cste\end{aligned}$$

3. On va simplifier la fonction f_2 et on calcule la dérivée de f_2 simplifiée. Comparer les dérivées de f_2 et f_2 simplifiée
   la fonction f_2 simplifiée est donnée par
   $f_2(x) = e^{(1+\ln x)} = \mathrm{e}\mathrm{e}^{\ln x} = \mathrm{e}\,x$
   La dérivée de f_2 simplifiée est donnée par
   $(f_2(x))' = e$
   La dérivée de f_2 non simplifiée est donnée par
   $$\begin{aligned}(f_2(x))' &= (e^{(1+\ln x)})' \\ &= (1+\ln x)'e^{(1+\ln x)} \\ &= \frac{1}{x}e^{(1+\ln x)} \\ &= \frac{1}{x}ex \\ &= e\end{aligned}$$
   On constate qu'on trouve le même résultat
4. On va trouver une relation entre $\frac{f_4'(x)}{f_4(x)}$ et $f_5(x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{f_4'(x)}{f_4(x)} &= \frac{(e^{\sqrt{x}})'}{e^{\sqrt{x}}} \\
&= \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{f_5(x)}{2}
\end{aligned}$$

On calcule la primitive de $f_5(x)$ par deux méthodes différentes.

a) Première méthode

$$\begin{aligned}
\int f_5(x) &= \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
&= \int \frac{2}{2\sqrt{x}} dx \\
&= 2\sqrt{x} + cste
\end{aligned}$$

b) Deuxième méthode

$$\begin{aligned}
\int f_5(x) &= \int 2\frac{f_4'(x)}{f_4(x)} dx \\
&= 2\ln(f_4(x)) + cste \\
&= 2\ln(e^{\sqrt{x}}) + cste \\
&= 2\sqrt{x} + cste
\end{aligned}$$

5. En utilisant le changement de variable, calculer $\displaystyle\int_1^2 f_5(x)\ dx$.

On calcule l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ en utilisant le changement de variable suivant $u = \sqrt{x}$.

$u = \sqrt{x} \implies x = u^2 \implies dx = 2u\,du$.

Quand $x = 1$ alors $u = 1$ et quand $x = 2$ alors $u = \sqrt{2}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u} 2u\,du \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} 2\,du \\
&= 2(\left[u\right]_1^{\sqrt{2}}) \\
&= 2(\sqrt{2} - 1)
\end{aligned}$$

On retrouver cette valeur en utilsant la question 4).

$$\begin{aligned}
\int_1^2 f_5(x)\,dx &= 2(\left[\sqrt{x}\right]_1^2) \\
&= 2(\sqrt{2} - 1)
\end{aligned}$$

Exercice 3

On injecte un médicament par voie intraveineuse à un malade (ici une dose de $200ml$). Un dosage de concentration est effectué à divers instants (l'instant $t = 0$ correspond à la fin de l'injection). On désigne par $C(t)$ la concentration du médicament dans le sang à l'instant t. Après l'injection, Expérimentalement on trouve que la concentration suit les valeurs données dans le tableau ci-dessous (t en heures et C en mg/ml) :

t	0	1	2	4	6	8	12	16	20	24
$C(t)$	11.0	10.2	9.5	8.2	7.0	6.1	4.5	3.4	2.5	1.8

Dans la théorie, les checheurs pensent que la concentration C suit une loi exponentielle : $C(t) = Qe^{-\gamma t}$, où γ vaut 75.10^{-3}.

1. $C(t)$ donnée par le tableau permet de connaitre seulement la concentration du médicament dans le sang aux instants finis 0, 1, 2 et jusqu'à 24 car ce sont des mesures pris par expérimentation. Alors que $C(t)$ donné par la formule va permettre de donner la concentration du médicament dans le sang à n'importe que instatnt. Il suffit de remplacer t par la valeur souhaité. Autre différence est que la valeur donnée par l'experimentation sera exacte alors que celle donné par la formule sera seulement une approximation.
2. En utilisant la formule de la fonction C et le tableau, on va donner la valeur de Q.
   D'après la formule on $C(0) = Q$ et d'après le tableau on a $C(0) = 11$. Donc par identification on conclut que $Q = 11$.
3. a) On va donner le domaine de définition de la fonction $C(t)$.

   $$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad f(x) \text{ soit bien définie}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

   b) On va donner l'intervalle sur lequel on va étudier cette fonction si on prend en considération le contexte biologique.
   On va travailler seulement sur $[0, +\infty$ car le temps ne peut pas être négatif.
   c) On va étudier dans ce contexte biologique le tableau de variation de $C(t)$.

   On étudie le signe de la fonction C
   On a $C'(t) = -11\gamma e^{-\gamma t}$. On a le tableau de variation de C est donné par

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$C'(t)$	$-$
$C(t)$	$11 \searrow 0$

   d) Est-ce que les résultats obtenus sont en accord avec les mesures expérimentales (du tableau) ?

   Oui les résultats obtenus sont en accord avec les mesures expérimentales car on voit que la cencentartion du médicament était de 11 et décroit jusqu'à atteindre la valeur nulle.
4. On note T l'intervalle de temps nécessaire pour que la concentration baisse jusqu'au tiers de sa valeur à l'instant t, c'est à dire $C(t+T) = C(t)/3$.
   On a $C(t+T) = C(t)/3$, donc
   $C(t+T) = C(t)/3$
   $Qe^{-\gamma(t+T)} = \frac{1}{3}Qe^{-\gamma(t)}$

   $Qe^{-\gamma(t+T)} = \frac{1}{3}Qe^{-\gamma(t)}$, donc

$Qe^{-\gamma T} = \frac{1}{3}Q$, donc
$-\gamma T = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$
$T = \frac{\ln 3}{\gamma}$
Trouver la valeur de T. Est-ce en accord avec les valeurs du tableau ?
la concentration baisse jusqu'au tiers de sa valeur, c'est à dire elle devient $11/3 \simeq 3.66$. Donc à peut près elle correspond dans le tableau à $t = 16$ c'est à dire $T \simeq 14,64$

5. Le taux de croissance relatif est donné par $\frac{C'(t)}{C(t)}$. Trouver ce taux et déduire pourquoi on a un signe $-$ dans $C(t)$