Examen électricité- session normale (19-20): Correction

EXERCICE 1

I - Charge ponctuelle

1) Expression du champ $\vec{E}(M)$: $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}$

2) AN: $E = \dfrac{9\cdot10^9 \times 1{,}6\cdot10^{-9}}{(5\cdot10^{-2})^2} = 5760\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$

3) Expression du potentiel $V(M)$: $V = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

4) AN: $V = \dfrac{9\cdot10^9 \times 1{,}6\cdot10^{-9}}{5\cdot10^{-2}} = 288\,\mathrm{V}$

II - Distribution de charges volumique

1) On traite le problème dans le système des coordonnées sphériques $M(r,\theta,\varphi)$:

- Lorsque on fait varier φ du point M, le champ électrostatique $\vec{E}(r,\theta,\varphi)$ au point M ne changera pas.
$\Rightarrow \vec{E}$ ne dépend pas de $\varphi \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}(r,\theta)$
- Lorsque on fait varier θ du point M, le champ électrostatique $\vec{E}(r,\theta)$ au point M ne changera pas.
$\Rightarrow \vec{E}$ ne dépend pas de $\theta \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}(r)$
- Toute plan qui passe par O et M est un plan de symétrie de la distribution de charge $\Rightarrow \vec{E}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM} = OM\vec{e_r}$
$\Rightarrow \vec{E} = E(r)\vec{e_r}$

2) Expression du module du champ électrostatique $E(r)$:

On considère la sphère de centre O et de rayon r comme étant la surface de Gauss:

- $\underline{r \le R}$: $\oiint_{(S)} \vec{E}.\vec{dS} = \dfrac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E \times \cancel{4\pi}r^2 = \dfrac{\cancel{4\pi}\rho r^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}}$
- $\underline{r \ge R}$: $\oiint_{(S)} \vec{E}.\vec{dS} = \dfrac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E \times \cancel{4\pi}r^2 = \dfrac{\cancel{4\pi}\rho R^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}}$

3) Expression du potentiel électrostatique $V(r)$:

E ne dépend que de r alors $V = -\int E dr$

- $\underline{r \ge R}$: $V = -\int \dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}dr = \dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + C^{te1}$
$V(\infty) = 0 \Rightarrow C^{te1} = 0 \Rightarrow \boxed{V = \dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}}$
- $\underline{r \le R}$: $V = -\int \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}dr = -\dfrac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + C^{te2}$
Continuité du potentiel $\Rightarrow V(R) = -\dfrac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + C^{te2} = \dfrac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$
$\Rightarrow C^{te2} = \dfrac{\rho R^2}{3\epsilon_0} + \dfrac{\rho R^2}{6\epsilon_0} = \dfrac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{V = \dfrac{\rho}{2\epsilon_0}\left(R^2 - \dfrac{r^2}{3}\right)}$

4) La charge totale est $q = \rho v = \dfrac{\rho \times 4\pi R^3}{3}$ donc On remplace ρ par $\rho = \dfrac{3q}{4\pi R^3}$

- $E = \dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} = \dfrac{\cancel{3}q}{4\pi \cancel{R^3}}\dfrac{\cancel{R^3}}{\cancel{3}\epsilon_0 r^2} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
- $V = \dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} = \dfrac{\cancel{3}q}{4\pi \cancel{R^3}}\dfrac{\cancel{R^3}}{\cancel{3}\epsilon_0 r} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

III - Condensateur sphérique

1) <u>Pour $r \leq R_1$</u>

a) Le Champ $E(r)$: Conducteur en équilibre $\Rightarrow$ $\boxed{E = E_{int} = 0}$

b) Le potentiel $V(r)$: $dV = -Edr \Rightarrow$ $\boxed{V = C^{te} = V_0}$

2) <u>Pour $R_1 \leq r \leq R_2$</u>:

a) Le Champ $E(r)$:

Théorème de Gauss: $E \times 4\pi r^2 = \dfrac{Q_0}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \dfrac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$

b) Le potentiel $V(r)$: $V = -\displaystyle\int Edr = \int \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} + C^{te}$

Continuité du potentiel: $\Rightarrow V(R_1) = \dfrac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_1} + C^{te} = V_0$

$$\Rightarrow C^{te} = V_0 - \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_1} \Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_1} + V_0}$$

3) $V(R_1) - V(R_2)$: $V(R_1) - V(R_2) = \dfrac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \dfrac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_2}$

$$\Rightarrow \boxed{V(R_1) - V(R_2) = \frac{Q_0(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}}$$

4) expression de la capacité C:

$$C = \frac{Q_0}{V(R_1) - V(R_2)} \Rightarrow \boxed{C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{(R_2 - R_1)}}$$

C ne dépend pas du rayon extérieur du condensateur.

EXERCICE 2

I - Résistance électrique d'un conducteur cylindrique

1) $\displaystyle\int_S \overrightarrow{j}.\overrightarrow{dS} = jS \Rightarrow \boxed{I = jS}$

2) Circulation du champ $\overrightarrow{E}$:

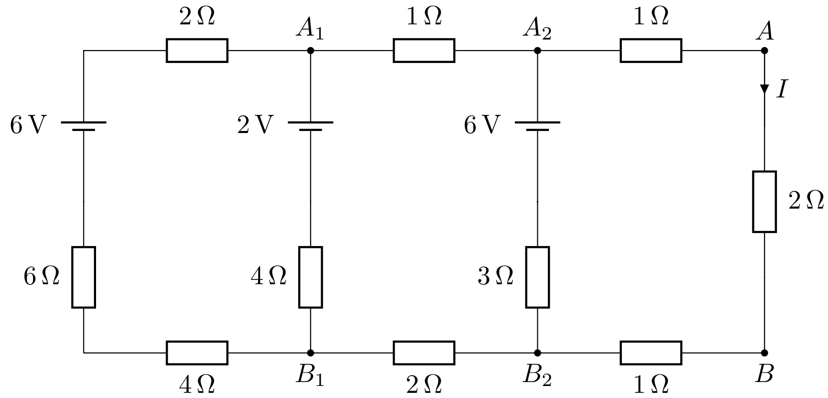
$$\mathcal{C}(\overrightarrow{E}) = \int_L \overrightarrow{E}\,\overrightarrow{dl} = \int Edl = EL = \frac{jL}{\sigma} \text{ (car } j = \sigma E)$$

3) Expression de la résistance R:

$$\Delta V = \mathcal{C}(\overrightarrow{E}) = RI = RjS = \frac{jL}{\sigma} \Rightarrow \boxed{R = \frac{L}{\sigma S}}$$

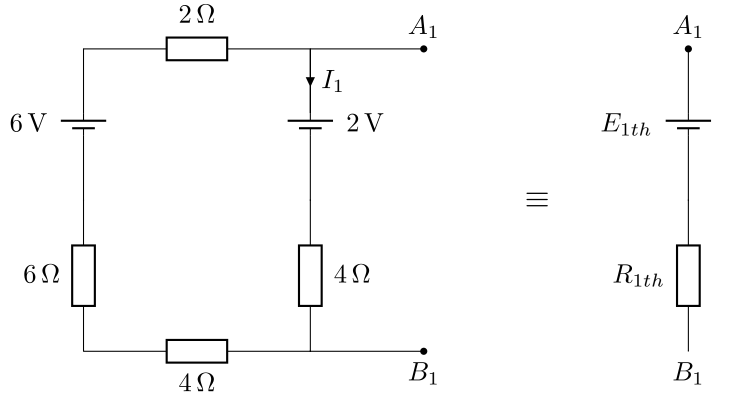
4) AN: $R = \dfrac{29{,}8 \cdot 10^{-2}}{59{,}6 \cdot 10^{6} \times 2{,}5 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^{-3}\,\Omega$

II - Intensité d'un courant électrique à travers une résistance électrique



1) Générateur de Thevenin équivalent entre les deux points A et B:

- Générateur de Thevenin équivalent entre A_1 et B_1:

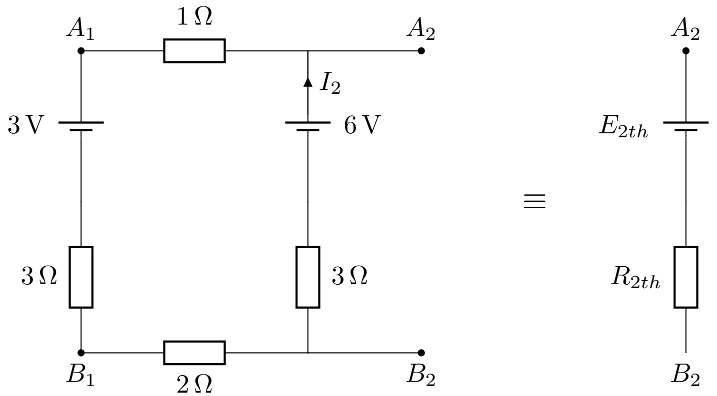


$R_{1th} = 4 \parallel (2+6+4) = 3\,\Omega$

$-6 + (2+6+4+4)I_1 + 2 = 0 \Rightarrow I_1 = \dfrac{4}{16} = 0{,}25\,\text{A}$

$\Rightarrow E_{1th} = 2 + 4I_1 = 2 + 4\times 0{,}25 = 3\,\text{V}$

- Générateur de Thevenin équivalent entre A_1 et B_1:

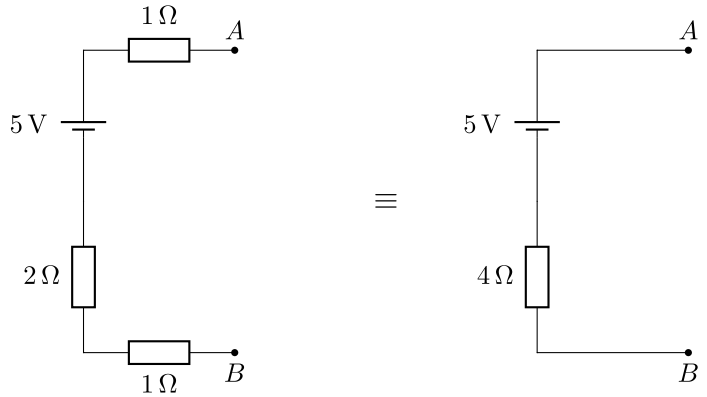


$R_{2th} = 3 \parallel (2+3+1) = 2\,\Omega$

$-6 + (1+3+2+3)I_2 + 3 = 0 \Rightarrow I_2 = \dfrac{3}{9} = \frac{1}{3}\text{A}$

$\Rightarrow E_{2th} = 6 - 3I_2 = 6 - 3\times\dfrac{1}{3} = 5\,\text{V}$

- Générateur de Thevenin équivalent entre A et B:



2) La valeur de l'intensité du courant I:

$$I = \frac{5}{4+2} = \frac{5}{6}\text{A}$$