

Vidange d'un réservoir (6pts)

I - Partie 1: L'orifice est fermé par un bouchon.

1) Pression P_O au point O :

$$P_O = P_A + \rho gh$$

$$\text{AN: } P_O = 1 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^3 \times 9,8 \times 3 = 129\,400 \text{ Pa}$$

2) Force de pression F :

$$F = P_O \times \pi r^2$$

$$\text{AN: } F = 129\,400 \times \pi \times (10 \cdot 10^{-3})^2 = 40,65 \text{ N}$$

II - Partie 2: L'orifice est ouvert.

1) Expression de la vitesse V_A :

$$S_A V_A = S_O V_O \Rightarrow V_A = \frac{S_O}{S_A} V_O \Rightarrow V_A = \frac{\pi r^2}{L \times l} V_O$$

2) Expression de la vitesse V_O :

$$\frac{\rho}{2} V_O^2 + \rho g z_O + P_O = \frac{\rho}{2} V_A^2 + \rho g z_A + P_A \quad (\text{puisque } P_O = P_A)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2} V_O^2 + \rho g z_O = \frac{\rho}{2} V_A^2 + \rho g z_A$$

$$\Rightarrow \frac{V_O^2}{2} + g z_O = \frac{V_A^2}{2} + g z_A$$

$$\Rightarrow V_O^2 - V_A^2 = 2g(z_A - z_O) = 2gh$$

$$\Rightarrow V_O^2 \left(1 - \left(\frac{\pi r^2}{L \times l} \right)^2 \right) = 2gh$$

$$\Rightarrow V_O = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{\pi r^2}{L \times l} \right)^2}}$$

3) Sous l'hypothèse $\pi r^2 \ll L \times l$: $V_O = \sqrt{2gh}$

$$\text{AN: } V_O = \sqrt{2 \times 9,8 \times 3} = 7,66 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

4) Débit volumique Q_v à travers l'orifice O :

$$Q_v = S_O V_O \Rightarrow Q_v = \pi r^2 \sqrt{2gh}$$

$$\text{AN: } Q_v = \pi (10 \cdot 10^{-3})^2 \sqrt{2 \times 9,8 \times 3} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

5) Si le rayon de l'orifice est réduit au moitié:

$$Q_{1v} = \pi \left(\frac{r}{2} \right)^2 \sqrt{2gh} = \frac{Q_v}{4} = \frac{2,4 \cdot 10^{-3}}{4} = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

6) Pour doubler deux fois le débit volumique:

$$\frac{Q_{2v}}{Q_v} = 2 = \frac{\pi r^2 \sqrt{2gh'}}{\pi r^2 \sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{h'}{h}} \Rightarrow h' = 4h = 12 \text{ m}$$